

第3章 | 数学と社会生活



1 数学を活用した問題解決

まとめ

数学を活用した考察の方法

日常生活における問題や社会問題を考えるとき、数学を活用して考察することが問題解決に役立つ場合がある。その場合、次のような手順で進めることが多い。

- ① 状況や問題に関して、仮定を立てて理想化したり単純化したりして、数学的に分析しやすくし、数式などを用いて状況や問題を表現する。
- ② ①で表現したことについて、数学を活用して解を求めて結果を得る。
- ③ ②で得られた結果が適切かどうかを考察する。必要に応じて、①で設定した仮定を変えるなどして再度分析する。

3章

数学と社会生活

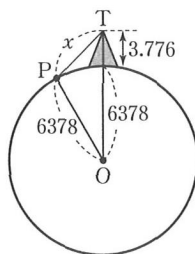
A 数学を活用した考察の方法

練習
1

地球の中心を O とする。教科書 112 ページの問題について、次の問いに答えよ。

- (1) x が最大となるように P の位置を定めるとき、 $\angle OPT$ を求めよ。
- (2) x の最大値を求めよ。ただし、小数第 1 位を四捨五入し、整数で答えよ。

教 p.112



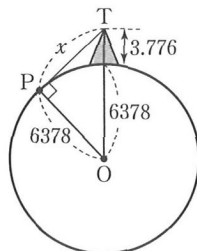
指針 図形の性質の利用

- (1) T が P から見えるためには、 $\angle OPT$ の大きさについてどのような条件が必要かを考える。

解答 (1) $\angle OPT$ が鋭角のとき、 PT は円 O と交わるので、 T は P からは見えない。

よって $\angle OPT \geq 90^\circ$ …… ①

また、 P が T に近いき $\angle OPT$ は鈍角であり、 P が離れるにつれて $\angle OPT$ の大きさは減少する。一方、 P が離れるにつれて PT 、すなわち x は増加するので、①より、 x が最大となるように P の



位置を定めると $\angle OPT=90^\circ$ 答

(2) (1)の場合の $\triangle OPT$ において、三平方の定理により

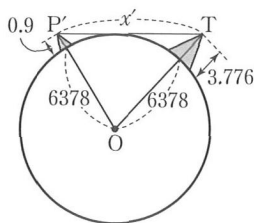
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{OT^2 - OP^2} \\ &= \sqrt{(6378 + 3.776)^2 - 6378^2} \\ &= \sqrt{12759.776 \times 3.776} \\ &= 219.5 \dots \end{aligned}$$

よって、求める x の最大値は 220 答

補足 (1)において、 $\angle OPT=90^\circ$ であるから、直線 TP は円 O の接線である。

練習 2

教科書 111 ページの仮定[1], [3], [4], および教科書 113 ページの仮定[2]がすべて成り立つとする。富士山の山頂を見ることができる場所 P' の標高を0.9kmとし、線分 TP' の長さを x' kmとすると、 x' の最大値を求めよ。ただし、小数第1位を四捨五入し、整数で答えよ。



教 p.113

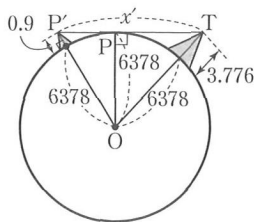
指針 図形の性質の利用 練習1での考察をもとに考えるとよい。地上にある点 P から T が見えるとき、 PT が最大になるのは $\angle OPT=90^\circ$ のときであり、点 P' はこのときの直線 TP の延長線上にあることになる。

解答 x' が最大となるのは、練習1の(1)で定めた点 P に対して、右の図のように、 P' が直線 TP の延長線上にあるときである。

よって、 $\triangle OPP'$ と $\triangle OPT$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} x' &= P'P + PT \\ &= \sqrt{OP'^2 - OP^2} + \sqrt{OT^2 - OP^2} \\ &= \sqrt{(6378 + 0.9)^2 - 6378^2} + \sqrt{(6378 + 3.776)^2 - 6378^2} \\ &= \sqrt{12756.9 \times 0.9} + \sqrt{12759.776 \times 3.776} \\ &= 326.6 \dots \end{aligned}$$

よって、求める x' の最大値は 327 答



B 利益の予測

教 p.115

練習
3

焼きそば 1 個の価格が 20 円上がると、販売数は 40 個減ると仮定する。また、焼きそば 1 個の価格が 200 円のときの販売数を 360 個と仮定する。このとき、焼きそば 1 個の価格を x 円、販売数を y 個として、 y を x の式で表せ。

指針 1 次関数の利用 1 個の価格が 20 円上がると販売数は 40 個減るから、 y は x の 1 次関数であり、変化の割合は $\frac{-40}{20} = -2$ である。これと、 $x=200$ のとき $y=360$ であることから式を求める。

解答 焼きそば 1 個の価格が 20 円上がると、販売数は 40 個減ると仮定するから、 y は x の 1 次関数であり、その変化の割合は $\frac{-40}{20} = -2$ によって、求める式は $y = -2x + b$ とおける。 $x=200$ のとき $y=360$ であるから $360 = -2 \times 200 + b$ $b = 760$ したがって $y = -2x + 760$ 答

練習
4

教 p.115

練習 3 の仮定から求められる全体の利益を $f(x)$ 円とする。

- (1) 焼きそば 1 個あたりの利益を x を用いて表せ。
- (2) (1)と練習 3 の結果を用いて、 $f(x)$ を x の式で表せ。
- (3) 全体の利益 $f(x)$ が最大となるときの焼きそば 1 個の価格を求めよ。また、そのときの焼きそばの販売数を求めよ。

指針 2 次関数の利用

- (1) (1 個あたりの価格) - (1 個あたりの費用)
- (2) (全体の利益) = (1 個あたりの利益) $\times$ (販売数)
- (3) (2)で求めた 2 次関数の式 $f(x)$ を平方完成して、 $f(x)$ が最大となるときの x の値 (焼きそば 1 個の価格) を求める。これを練習 3 で求めた式に代入すれば販売数を求めることができる。

解答 (1) 1 個あたりの利益は、1 個あたりの価格から 1 個あたりの費用 50 円を引いた金額であるから

$$x - 50 \text{ (円)} \quad \text{答}$$

- (2) 全体の利益 $f(x)$ は、(1 個あたりの利益) $\times$ (販売数) であるから、(1)および練習 3 の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 50)(-2x + 760) \\ &= -2x^2 + 860x - 38000 \quad \text{答} \end{aligned}$$

3 章

数学と社会生活

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (2) \text{より} \quad f(x) &= -2x^2 + 860x - 38000 \\
 &= -2(x^2 - 430x) - 38000 \\
 &= -2(x - 215)^2 + 2 \cdot 215^2 - 38000 \\
 &= -2(x - 215)^2 + 54450
 \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ は $x=215$ で最大となる。

すなわち、全体の利益が最大となるときの

焼きそば 1 個の価格は 215 円 ㊟

このときの焼きそばの販売数は

$$-2 \times 215 + 760 = 330 \text{ (個)} \quad \text{㊟}$$

2 次関数の最大・
最小は平方完成
して求めよう。



練習 5

右の表を用いて、焼きそば
1 個の価格が 200 円未満の
場合の利益について考察せ
よ。その際、練習 3 のよう
な仮定を、自分で適当に設定してよい。

焼きそば 1 個の価格 (円)	販売数 (個)
190	420
180	439

教 p.115

指針 関数の利用 まず、焼きそば 1 個の価格を x 円として、練習 3 と同様に、販売数が x の 1 次関数となるように設定する。次に、練習 4 と同様にして、全体の利益を x の 2 次関数で表す。ここで、問題文より、 $x < 200$ 、すなわち $x \leq 199$ であることに注意する。

解答 (例) 焼きそば 1 個の価格が 10 円上がると、販売数は 20 個減ると仮定する。また、焼きそば 1 個の価格が 180 円の際の販売数を 440 個と仮定する。このとき、焼きそば 1 個の価格を x 円、販売数を y 個とすると、 y は x

$$\text{の 1 次関数であり、変化の割合は } \frac{-20}{10} = -2$$

よって、 $y = -2x + b$ とおき、 $x = 180$ のとき $y = 440$ であるから

$$440 = -2 \times 180 + b \quad b = 800$$

したがって $y = -2x + 800$

よって、全体の利益 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x - 50)(-2x + 800) = -2x^2 + 900x - 40000 \\
 &= -2(x^2 - 450x) - 40000 = -2(x - 225)^2 + 2 \cdot 225^2 - 40000 \\
 &= -2(x - 225)^2 + 61250
 \end{aligned}$$

x が 200 未満の整数のとき、 $x \leq 199$ であるから、 $f(x)$ は $x = 199$ で最大となる。

すなわち、全体の利益が最大となるときの焼きそば 1 個の価格は

$$199 \text{ 円} \quad \text{㊟}$$

【参考】 本問においては、利益の最大値は 59898 ($x=199$ のとき) であり、練習 4 においては、利益の最大値は 54450 ($x=215$ のとき) となっている。このことと、教科書 p.115 の 19 行目～22 行目のことを考え合わせれば、焼きそば 1 個の価格を 200 円未満に設定する方が利益が大きくなる可能性があることも考慮した方がよいといえる。

C 電球の使用時間と費用

教 p.116

練習
6

教科書 116 ページにおいて、電球を 30 日だけ使用する場合、3 種類の電球のそれぞれについてかかる費用を求めよ。また、その結果をもとに、どの電球を購入すればよいか答えよ。

【指針】 電球の使用時間と費用 使用時間の合計は $10 \times 30 = 300$ (時間) であるから、いずれも 1 個で済む。したがって、かかる費用はいずれについても (1 個の値段) + (1 日の電気代) $\times 30$ で求められる。

【解答】 各電球は 1 日に 10 時間使用するから、30 日間では

$$10 \times 30 = 300 \text{ (時間) 使用する。}$$

よって、どの電球を購入しても 1 個あれば 30 日間使用できる。

LED 電球を購入するときにかかる費用は

$$1500 + 1.89 \times 30 = 1556.7 \text{ (円) } \quad \text{【答】}$$

電球型蛍光灯を購入するときにかかる費用は

$$700 + 2.97 \times 30 = 789.1 \text{ (円) } \quad \text{【答】}$$

白熱電球を購入するときにかかる費用は

$$200 + 16.20 \times 30 = 686 \text{ (円) } \quad \text{【答】}$$

したがって、白熱電球を使用するときにかかる費用が最も安いから、白熱電球を購入すればよい。 **【答】**

練習
7

電球型蛍光灯, LED 電球のそれぞれについて, 使用時間が 6000 時間以下の場合について, 使用時間と費用の関係をそれぞれグラフで表し, それを白熱電球に関するグラフに重ねてかけ。

指針 電球の使用時間と費用のグラフ それぞれの電球について, 時間 x のときの費用を y として, y を x の式で表し, 横軸を x 軸, 縦軸を y 軸とみてグラフをかく。使用時間が 6000 時間以下であるから, どちらの電球についてもそれぞれ 1 つの式で表せる。

解答 時間 x のときの費用を y とし, 横軸を x 軸, 縦軸を y 軸とみる。 x の変域は $0 < x \leq 6000$ …… ① である。

電球型蛍光灯のグラフは, ①においては, 傾きが $\frac{2.97}{10} = 0.297$, y 切片が 700

の直線であり,

$y = 0.297x + 700$ と表される。

同様に, LED 電球の

グラフは, ①においては直線

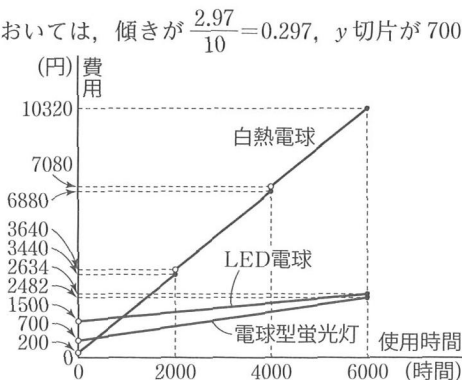
$y = 0.189x + 1500$ となる。

したがって, 2 つの電球の

グラフを白熱電球のグラフ

に重ねてかくと, 右の図の

ようになる。

練習
8

教科書 116 ページの問題について, 次の問いに答えよ。

- (1) 電球を 600 日使用する場合, どの電球を購入すればよいか答えよ。
- (2) 電球の使用時間によって, どの電球を購入するのがよいかを考察せよ。

指針 グラフを利用した考察

- (1) 使用時間は $10 \times 600 = 6000$ (時間) であるから, 練習 7 でかいたグラフが利用できる。
- (2) 練習 7 でかいたグラフに $x > 6000$ の部分を補い, そのうえで, どの区間でどのグラフが最も下にあるかを確認するとよい。

解答 (1) 各電球は1日に10時間使用するから、600日間では $10 \times 600 = 6000$ (時間) 使用する。練習7でかいたグラフより、6000時間における費用は、電球型蛍光灯が最も安い。よって、電球型蛍光灯を購入すればよい。 答

(2) 時間 x におけるLED電球，電球型蛍光灯，白熱電球の費用をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ とする。

図1

横軸を x 軸，縦軸を y 軸とし，練習7のグラフに $x > 6000$ の部分を少し補うと，右の図1のようになる。

この図から， $g(x) = h(x)$ となるのは $0 < x < 2000$ のときであり，このとき，

$$g(x) = 0.297x + 700,$$

$$h(x) = 1.620x + 200 \text{ である。}$$

$$g(x) = h(x) \text{ より } 0.297x + 700 = 1.620x + 200$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{500}{1.323} \div 378$$

また， $x = 6000$ の前後で $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わる。

ここで，図1のグラフの $x > 6000$ の部分を $y = f(x)$ と $y = g(x)$ についてかくと，次の図2のようになる。

図2

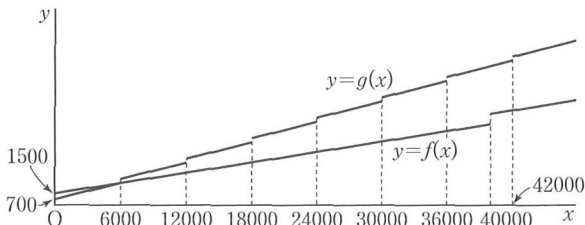


図1，図2から， $x > 6000$ において $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ の大小関係は変わらないことがわかる。

以上から $0 < x \leq 378$ のとき $h(x)$ が最小

$378 \leq x \leq 6000$ のとき $g(x)$ が最小

$6000 < x$ のとき $f(x)$ が最小

よって

378時間以下使用するときには白熱電球，

378時間以上 6000時間以下使用するときには電球型蛍光灯，

6000 時間より長く使用するときには LED 電球
を購入するのがよい。 罫

D シェアサイクルの自転車の推移

教 p.120

練習
9

教科書 119 ページの [1], [2] の仮定のもと, n 日目終了後の A, B
にある自転車の, 総数に対する割合を, それぞれ a_n, b_n とする。

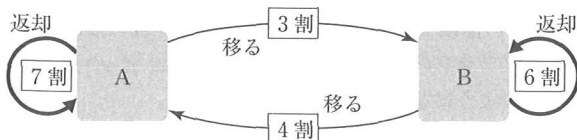
1 日目開始前の A, B にある自転車の台数の割合を, それぞれ a, b とする。ただし, a, b は $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, a+b=1$ を満たす
実数である。

- (1) a_1, b_1 を a, b を用いてそれぞれ表せ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} は, a_n, b_n を用いて次のように表すことができる。
次のア~エに当てはまる数を答えよ。

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ア}} a_n + \boxed{\text{イ}} b_n, \quad b_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} a_n + \boxed{\text{エ}} b_n$$

- (3) $a=0.8, b=0.2$ のとき, a_3, b_3 を求めよ。

指針 連立漸化式の立式 仮定 [1], [2] を図に表すと下のようになる。



- (1), (2) は上のような推移図を参照しながら考えるとよい。
- (3) は, (1), (2) の結果を利用して, $a, b \rightarrow a_1, b_1 \rightarrow a_2, b_2 \rightarrow a_3, b_3$ と求めてい
けばよい。

解答 (1) 1 日目開始前の A, B にある自転車の台数の割合は, それぞれ a, b であ
る。

1 日目終了後の A にある自転車の台数の割合 a_1 は, A から貸し出され A
に返却された自転車の台数の割合と B から貸し出され A に返却された自
転車の台数の割合との和である。

よって $a_1 = 0.7a + 0.4b$ 罫

1 日目終了後の B にある自転車の台数の割合 b_1 は, A から貸し出され B
に返却された自転車の台数の割合と B から貸し出され B に返却された自
転車の台数の割合との和である。

よって $b_1 = 0.3a + 0.6b$ 罫

- (2) (1) と同様に考えると

$$a_{n+1} = 0.7a_n + 0.4b_n, \quad b_{n+1} = 0.3a_n + 0.6b_n$$

☐ ア…0.7, イ…0.4, ウ…0.3, エ…0.6

(3) $a=0.8, b=0.2$ のとき, (1), (2)より

$$a_1=0.7a+0.4b=0.7\times 0.8+0.4\times 0.2=0.64$$

$$b_1=0.3a+0.6b=0.3\times 0.8+0.6\times 0.2=0.36$$

$$a_2=0.7a_1+0.4b_1=0.7\times 0.64+0.4\times 0.36=0.592$$

$$b_2=0.3a_1+0.6b_1=0.3\times 0.64+0.6\times 0.36=0.408$$

したがって

$$a_3=0.7a_2+0.4b_2=0.7\times 0.592+0.4\times 0.408=0.5776 \quad \text{☐}$$

$$b_3=0.3a_2+0.6b_2=0.3\times 0.592+0.6\times 0.408=0.4224 \quad \text{☐}$$

練習
10

教 p.120

a, b の値を変化させたとき, n が大きくなるにつれて, a_n, b_n の値がどのようになるかを, 練習 9 で考えた関係式やコンピュータなどを用いて考察せよ。

指針 数列が近づく値 $0\leq a\leq 1, 0\leq b\leq 1, a+b=1$ を満たす a, b の組を何組か設定し, それらの値に対して, 練習 9 の(1), (2)で求めた式を利用して, $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$ の値を次々と求めていく。コンピュータなどを利用して計算するとよい。

解答 練習 9 の(1), (2)で求めた

$$a_1=0.7a+0.4b, b_1=0.3a+0.6b$$

$$a_{n+1}=0.7a_n+0.4b_n, b_{n+1}=0.3a_n+0.6b_n$$

を用いて, n を大きくしたときに a_n, b_n が近づく値をコンピュータを用いて計算する。

たとえば, [1] $a=0.8, b=0.2$, [2] $a=0.4, b=0.6$ として, a_n, b_n の値を計算すると, 次の表ようになる。

[1] $a=0.8, b=0.2$

	a_n	b_n
$n=1$	0.64	0.36
$n=2$	0.592	0.408
$n=3$	0.5776	0.4224
$n=4$	0.57328	0.42672
$n=5$	0.571984	0.428016
$n=6$	0.571595	0.428405
$n=7$	0.571479	0.428521
$n=8$	0.571444	0.428556
$n=9$	0.571433	0.428567
$n=10$	0.571430	0.428570
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[2] $a=0.4, b=0.6$

	a_n	b_n
$n=1$	0.52	0.48
$n=2$	0.556	0.444
$n=3$	0.5668	0.4332
$n=4$	0.57004	0.42996
$n=5$	0.571012	0.428988
$n=6$	0.571304	0.428696
$n=7$	0.571391	0.428609
$n=8$	0.571417	0.428583
$n=9$	0.571425	0.428575
$n=10$	0.571428	0.428572
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

前の表から、 n が大きくなるにつれて、 a_n, b_n はある値に近づいていくことがわかる。

また、その値は、 a, b の値によらず一定である。 終

【参考】 $a_{n+1}=0.7a_n+0.4b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$b_{n+1}=0.3a_n+0.6b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とする。

①+②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$$

したがって、数列 $\{a_n+b_n\}$ は定数であり、その値は初項 a_1+b_1 に等しいので、

$$\begin{aligned} a_n+b_n &= a_1+b_1 = (0.7a+0.4b) + (0.3a+0.6b) \\ &= a+b=1 \end{aligned}$$

よって、 $b_n=1-a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$ を①に代入すると

$$a_{n+1}=0.7a_n+0.4(1-a_n)$$

整理すると $a_{n+1}=\frac{3}{10}a_n+\frac{4}{10}$

漸化式を変形すると $a_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{3}{10}\left(a_n-\frac{4}{7}\right)$

よって、数列 $\left\{a_n-\frac{4}{7}\right\}$ は公比 $\frac{3}{10}$ の等比数列で、初項は

$$a_1-\frac{4}{7}=\frac{7}{10}a+\frac{2}{5}b-\frac{4}{7}$$

したがって

$$a_n-\frac{4}{7}=\left(\frac{7}{10}a+\frac{2}{5}b-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n=\left(\frac{7}{10}a+\frac{2}{5}b-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

したがって、③、④より

$$\begin{aligned} b_n=1-a_n &= 1-\left\{\left(\frac{7}{10}a+\frac{2}{5}b-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}\right\} \\ &= \left(\frac{4}{7}-\frac{7}{10}a-\frac{2}{5}b\right)\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{3}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

実は、 $|r|<1$ のとき、 r^n は n が大きくなるにつれて0に近づくことが知られている。したがって、④、⑤において、 $\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}=\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n$ は0に近づくの

で、 n が大きくなるにつれて、 a_n, b_n はそれぞれ $\frac{4}{7}, \frac{3}{7}$ に近づく。

一般に、数列 $\{x_n\}$ において、 n が限りなく大きくなるにつれて、 x_n が一定の値 α に限りなく近づくとき、数列 $\{x_n\}$ は α に収束するといい、 α を数列 $\{x_n\}$ の

極限值という。本問の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の極限值はそれぞれ $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$ である。詳しくは数学Ⅲで学習することになる。

練習
11

教 p.121

A, B で合計 42 台の自転車を貸し出すことを考える。1 日目開始前の A, B にある自転車の台数をそれぞれ 24 台, 18 台とする。このとき, n 日目終了後の A, B にある自転車の台数を求めよ。また, この結果は何を表しているか答えよ。

指針 漸化式を用いた考察 $a = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$, $b = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ であり, 練習 9 の(1)の式を用いれば $a_1 = \frac{4}{7}$, $b_1 = \frac{3}{7}$ となることがわかる。このことから, 同様にして $a_n = \frac{4}{7}$, $b_n = \frac{3}{7}$ となることが予想できるから, これが正しいことを数学的帰納法によって示す。

解答 $a = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$, $b = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ より, 練習 9 の(1)の式を用いれば

$$a_1 = 0.7a + 0.4b = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$b_1 = 0.3a + 0.6b = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

このことから, すべての自然数 n に対して

$$a_n = \frac{4}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_n = \frac{3}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となると推測できる。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき①, ②は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①, ②が成り立つ, すなわち $a_k = \frac{4}{7}$, $b_k = \frac{3}{7}$

であるとすると, 練習 9 の(2)の漸化式を用いて

$$a_{k+1} = 0.7a_k + 0.4b_k = \frac{4}{7}, \quad b_{k+1} = 0.3a_k + 0.6b_k = \frac{3}{7}$$

よって, $n=k+1$ のときも①, ②が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について①, ②が成り立つ。

したがって, n 日目終了後の A, B にある自転車の台数はそれぞれ

$$42 \times \frac{4}{7} = 24 \text{ (台)}, \quad 42 \times \frac{3}{7} = 18 \text{ (台)} \quad \text{答}$$

となる。よって, A, B にある自転車の台数がそれぞれ常に 24 台, 18 台であることを表している。 答

3
章

数学と社会生活

練習
12

A, B で合計 42 台の自転車を貸し出すとき, A の最大収容台数を, 次の手順①, ②, ③で考察せよ。

- ① 教科書 119 ページの仮定[2]の割合を, 次の表のように A に返却される台数が最も多いときの割合に変更する。

	A に返却	B に返却
A から貸出	0.9	0.1
B から貸出	0.6	0.4

← 社会実験の結果のうち,
A に返却される台数が
最も多いときの割合

- ② 練習 9 と同様に, a_n, b_n についての関係式を立てる。
③ ②を用いて a_n, b_n の値の変化を調べ, A の最大収容台数を求める。

また, 教科書 119 ページの仮定[2]の割合を, 社会実験の結果のうち, B に返却される台数が最も多いときの割合に変更して, B の最大収容台数を求めよ。

※「社会実験」の言葉の意味については, 教科書 119 ページの問題文, およびページ下部の注釈を参照

指針 連立漸化式の立式, 数列が近づく値

手順①, ②…練習 9 と同様にして, a_1, b_1 を求める式, および漸化式を立式する。

手順③…練習 10 と同様にして a_n, b_n の値を計算し, a_n の近づく値を求める。
その値を α とすれば, A の最大収容台数は $42 \times \alpha$ で求めることができる。

B の最大収容台数についても同様の手順で行う。

解答 1 日目開始前の A, B にある自転車の台数の割合を, それぞれ a, b ($a+b=1$) とし, n 日目終了後の A, B にある自転車の, 総数に対する割合をそれぞれ a_n, b_n とする。

[A の最大収容台数について]

手順①, ②

練習 9 の(1), (2)と同様に考えると

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0.9a + 0.6b, & b_1 &= 0.1a + 0.4b \\ a_{n+1} &= 0.9a_n + 0.6b_n, & b_{n+1} &= 0.1a_n + 0.4b_n \end{aligned} \right] \textcircled{A}$$

手順③

手順①, ②で求めた式を用いて, a_n, b_n の値をコンピュータ等を用いて順に計算すると, a, b の値によらず, a_n の近づく値は

$0.857142\cdots(b_n \text{ の近づく値は } 0.142857\cdots)$ となる。

よって、A の最大収容台数は $42 \times 0.857142 \cdots \div 36$ (台) 〔答〕

[B の最大収容台数について]

教科書 p.119 の仮定[2]の割合を、B に返却される台数が最も多いときの割合に変更すると、右の表のようになる。

	A に返却	B に返却
A から貸出	0.5	0.5
B から貸出	0.2	0.8

手順①, ②

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0.5a + 0.2b, \quad b_1 = 0.5a + 0.8b \\ a_{n+1} &= 0.5a_n + 0.2b_n, \quad b_{n+1} = 0.5a_n + 0.8b_n \end{aligned} \right\} \textcircled{B}$$

手順③

手順①, ②で求めた式を用いて、 a_n, b_n の値を順に計算すると、 a, b の値によらず、 b_n の近づく値は $0.714285 \cdots$ (a_n の近づく値は $0.285714 \cdots$) となる。よって、B の最大収容台数は $42 \times 0.714285 \cdots \div 30$ (台) 〔答〕

〔参考〕数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の初項 a_1, b_1 と漸化式が①, ②のように与えられているとき、それぞれの場合において、一般項 a_n, b_n は次のようになる。

$$\textcircled{A} \text{ のとき } a_n = \left(\frac{9}{10}a + \frac{3}{5}b - \frac{6}{7} \right) \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} + \frac{6}{7}$$

$$b_n = \left(\frac{6}{7} - \frac{9}{10}a - \frac{3}{5}b \right) \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} + \frac{1}{7}$$

$$\textcircled{B} \text{ のとき } a_n = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}b - \frac{2}{7} \right) \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} + \frac{2}{7}$$

$$b_n = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{5}b \right) \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^{n-1} + \frac{5}{7}$$

n が大きくなるにつれて、 $\left(\frac{3}{10} \right)^{n-1}$ は 0 に近づくから、

①のとき、 a_n, b_n はそれぞれ $\frac{6}{7}, \frac{1}{7}$ に近づき、②のとき、 a_n, b_n はそれぞれ

$\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ に近づく。

2 社会の中にある数学

まとめ

1 選挙における議席配分

議席を割り振る方法は、最大剰余方式やアダムズ方式などがある。

2 トリム平均

データを値の大きさの順に並べたときに、データの両側から同じ個数だけ除外した後でとる平均のことを トリム平均 または 調整平均 という。

データの両側から個数の $x\%$ ずつ除外した後でとる平均を $x\%$ トリム平均と呼ぶこともある。

A 選挙における議席配分

教 p.123

練習
13

教科書 122 ページの問題について、各選挙区に最大剰余方式で議席を割り振れ。

指針 最大剰余方式による議席配分 実質的には教科書 p.123 の前半で示されている作業の続きを行うことになる。最大剰余方式の手順③に従い、小数点以下の値をもとに、残りの 2 議席を割り振る。

解答 各選挙区の人口を $d = \frac{140000}{15} (=9333.33\cdots)$ で割った値は

第 1 選挙区 5.357…… 第 2 選挙区 3.75

第 3 選挙区 3.428…… 第 4 選挙区 2.464……

となる。小数点以下を切り捨てれば、各選挙区に割り振る議席は順に 5, 3, 3, 2 であり、その和は 13 であるから、2 議席が余る。

ここで、各選挙区の人口を d で割った値について、小数点以下を切り捨てた値は順に 0.357……, 0.75, 0.428……, 0.464……であるから、残りの 2 議席は第 2 選挙区と第 4 選挙区に割り振ればよい。

よって、各選挙区への議席数の割り振りは、順に 5, 4, 3, 3 答

教 p.123

練習
14

教科書 122 ページの問題で議席総数を 16 としたとき、各選挙区に最大剰余方式で議席を割り振れ。また、練習 13 の結果と比べて、気づいたことを答えよ。

指針 最大剰余方式による議席配分 教科書 p.123 の前半、および練習 13 と同様の作業を行えばよい。また、各選挙区の議席数が練習 13 の結果からどのように変化しているかを比べてみるとよい。

解答 総人口 140000 人を議席総数 16 で割った値 d は

$$d = \frac{140000}{16} (=8750)$$

各選挙区の人口を d で割った値は

$$\text{第 1 選挙区 } 50000 \div d = 50000 \times \frac{16}{140000} = \frac{40}{7} = 5.714\cdots$$

$$\text{第 2 選挙区 } 35000 \div d = 35000 \times \frac{16}{140000} = 4$$

$$\text{第 3 選挙区 } 32000 \div d = 32000 \times \frac{16}{140000} = \frac{128}{35} = 3.657\cdots$$

$$\text{第 4 選挙区 } 23000 \div d = 23000 \times \frac{16}{140000} = \frac{92}{35} = 2.628\cdots$$

となり、各値の小数点以下を切り捨てた値は 5, 4, 3, 2 で、その和は 14 であるから、2 議席が余る。

各選挙区の人口を d で割った値について、切り捨てた値は順に 0.714..., 0, 0.657..., 0.628... であるから、残りの 2 議席は第 1 選挙区と第 3 選挙区に割り振ればよい。

よって、各選挙区への議席数の割り振りは、順に 6, 4, 4, 2 図

また、練習 13 の結果と比べると、たとえば次のようなことがわかる。

- ・議席総数を増やしたにもかかわらず、第 4 選挙区の議席数が減っている。
- ・議席総数が変わると、切り捨てた値の大きさが変わるため、残りの議席を割り振る選挙区も変わる。 図

練習
15

教 p.125

教科書 122 ページの問題で、議席総数を 16 としたとき、各選挙区にアダムズ方式で議席を割り振れ。

指針 アダムズ方式による議席配分 教科書 p.125 の例 1 と同様の作業を行えばよい。議席総数が 16 なので、練習 14 において計算した結果を利用するとよい。

解答 ① 総人口を議席総数で割ると $d = \frac{140000}{16} (=8750)$

② 各選挙区の人口をそれぞれ d で割ると

$$\text{第 1 選挙区 } 5.714\cdots \quad \text{第 2 選挙区 } 4$$

$$\text{第 3 選挙区 } 3.657\cdots \quad \text{第 4 選挙区 } 2.628\cdots$$

小数点以下を切り上げて整数にすると

$$\text{第 1 選挙区 } 6 \quad \text{第 2 選挙区 } 4$$

$$\text{第 3 選挙区 } 4 \quad \text{第 4 選挙区 } 3$$

③ ②の結果、議席数の合計は 17 となり議席総数より多くなってしまう。

そこで、 $d'=10000$ として再度手順②の計算を行うと

$$\text{第1選挙区 } 50000 \div d' = 5$$

$$\text{第2選挙区 } 35000 \div d' = 3.5$$

$$\text{第3選挙区 } 32000 \div d' = 3.2$$

$$\text{第4選挙区 } 23000 \div d' = 2.3$$

この計算結果の小数点以下を切り上げて整数にすると

$$\text{第1選挙区 } 5 \qquad \text{第2選挙区 } 4$$

$$\text{第3選挙区 } 4 \qquad \text{第4選挙区 } 3$$

④ この値の合計は 16 となるから、この値を議席数とすればよい。

よって、各選挙区への議席数の割り振りは、順に 5, 4, 4, 3 図



教 p.125

議席を割り振る方法を他にも調べ、それぞれの方法を比較してみよう。

解答 (例1) 「ジェファースン方式」

ジェファースン方式では、アダムズ方式の手順②において、各選挙区の人口を d で割った値が整数でない場合は小数点以下を切り捨てて整数にする。

たとえば、教科書 p.122 の問題について、各選挙区の人口を

$$d = \frac{140000}{15} (=9333.33\cdots) \text{ で割った値は次の通りであった。}$$

$$\text{第1選挙区 } 5.357\cdots \qquad \text{第2選挙区 } 3.75$$

$$\text{第3選挙区 } 3.428\cdots \qquad \text{第4選挙区 } 2.464\cdots$$

よって、各値の小数点以下を切り捨てた値は 5, 3, 3, 2 で、その和は 13 であり、これは議席総数 15 と異なる。

そこで、 $d'=8300$ とすると、各選挙区の人口を d' で割った値は

$$\text{第1選挙区 } 50000 \div d' = \frac{500}{83} = 6.024\cdots$$

$$\text{第2選挙区 } 35000 \div d' = \frac{350}{83} = 4.216\cdots$$

$$\text{第3選挙区 } 32000 \div d' = \frac{320}{83} = 3.855\cdots$$

$$\text{第4選挙区 } 23000 \div d' = \frac{230}{83} = 2.771\cdots$$

ここで、各値の小数点以下を切り捨てた値は 6, 4, 3, 2 で、その和は議席総数 15 と一致する。したがって、これらを議席数とすればよい。

(例2) 「ウェブスター方式」

ウェブスター方式では、アダムズ方式の手順②において、各選挙区の人口を d で割った値が整数でない場合は小数第 1 位を四捨五入して整数にする。

たとえば、教科書 p.122 の問題について、各選挙区の人口を

$$d = \frac{140000}{15} (=9333.33\cdots) \text{ で割った値の小数第 1 位を四捨五入した値は } 5, 4,$$

3, 2 で、その和は 14 であり、これは議席総数 15 と異なる。

そこで $d' = 9200$ とすると、各選挙区の人口を d' で割った値は

$$\text{第 1 選挙区 } 50000 \div d' = \frac{125}{23} = 5.434\cdots$$

$$\text{第 2 選挙区 } 35000 \div d' = \frac{175}{46} = 3.804\cdots$$

$$\text{第 3 選挙区 } 32000 \div d' = \frac{80}{23} = 3.478\cdots$$

$$\text{第 4 選挙区 } 23000 \div d' = \frac{5}{2} = 2.5$$

ここで、各値の小数第 1 位を四捨五入した値は、5, 4, 3, 3 で、その和は議席総数 15 と一致する。したがって、これらを議席数とすればよい。

(例 3) 「ドント方式」

次の手順で議席を割り振る。

- ① 各選挙区の人口を 1, 2, 3, ……で割っていく。
- ② 各選挙区のそれぞれの商のうち、大きいものから順に議席数と同じ数だけ選ぶ。
- ③ 各選挙区に対して、選んだ数の個数を議席として割り振る。

たとえば、教科書 p.122 の問題について、各選挙区の人口を 1, 2, 3, ……で割った商のうち、大きいものから順に 15 個の数を選ぶと、順に次の表の [1] ~ [15] のようになる。

選挙区 割る数	第 1 選挙区 (50000)	第 2 選挙区 (35000)	第 3 選挙区 (32000)	第 4 選挙区 (23000)
1	50000[1]	35000[2]	32000[3]	23000[5]
2	25000[4]	17500[6]	16000[8]	11500[11]
3	16666[7]	11666[10]	10666[12]	7666
4	12500[9]	8750[14]	8000	5750
5	10000[13]	7000	6400	4600
6	8333[15]	5833	5333	3833

各選挙区について、[1] ~ [15] の数は順に 6 個、4 個、3 個、2 個であるから、各選挙区への議席数の割り振りは順に 6, 4, 3, 2 となる。

以上より、それぞれの方法を比較すると、最大剰余方式は 1 回の作業で議席数を決定でき、計算量も最も少ない。ドント方式も 1 回の作業で議席数を決定できるが、計算量が多くなる。アダムズ方式、ジェファーソン方式、ウェブスター方式では、選挙区の人口を割る作業を複数回行わなければならない

場合が多いから、やはり計算量が多くなる。 図

参考 教科書 p.122 の問題について、総議席数を 16 とするとき、(例 1)～(例 3) の 3 つの方式で議席を割り振ると、次のようになる。

ジェファースン方式 順に 6, 4, 4, 2 ($d'=8000$ とする)

ウェブスター方式 順に 5, 4, 4, 3 ($d'=9100$ とする)

ドント方式 順に 6, 4, 4, 2

なお、ジェファースン方式とドント方式については結果が一致することが知られている。

B スポーツの採点競技

教 p.127

練習 16

ある合唱コンクールでは、10 人の審査員による採点が行われる。次の表は、3 つの合唱団 A, B, C の採点結果である。20%トリム平均が最も高い合唱団が優勝する場合、どの合唱団が優勝するか答えよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
A	4	5	4	5	4	7	4	10	4	8
B	3	5	8	3	8	3	3	9	8	5
C	1	7	6	6	5	5	6	6	7	6

(単位は点)

指針 **トリム平均の利用** まず、それぞれの採点結果を大きさの順に並べる。20%トリム平均を求めるのであるから、両側から 20%ずつ、すなわち、2 つずつを除外した残り 6 つの値の平均を求めればよい。

解答 A, B, C の採点結果を高い順に並べると次のようになる。

A 10, 8, 7, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4

B 9, 8, 8, 8, 5, 5, 3, 3, 3, 3

C 7, 7, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 1

両側から 20%ずつ、すなわち、2 つずつを除外した残りの 6 つの値の平均はそれぞれ

$$A \quad \frac{7+5+5+4+4+4}{6} = 4.83\cdots$$

$$B \quad \frac{8+8+5+5+3+3}{6} = 5.33\cdots$$

$$C \quad \frac{6+6+6+6+6+5}{6} = 5.83\cdots$$

よって、C が優勝する。 図

3 変化をとらえる ～移動平均～

まとめ

1 時系列データと移動平均

1つの項目について、時間に沿って集めたデータを **時系列データ** という。時系列データに対して、各時点のデータを、その時点を含む過去の n 個のデータの平均値でおき換えたものを **移動平均** という。

たとえば、その年を含めて過去5年のデータ、すなわち5年分の平均値をとる移動平均を5年移動平均という。

移動平均を用いると、データの激しい変動がおさえられ、変化の傾向を大まかにとらえることができる。

2 移動平均のグラフ

移動平均のグラフは、大まかな変化の傾向をとらえやすくなる一方で、特徴的な変化や局所的な極端な変化が見えなくなる場合もある。

A 移動平均

教 p.130

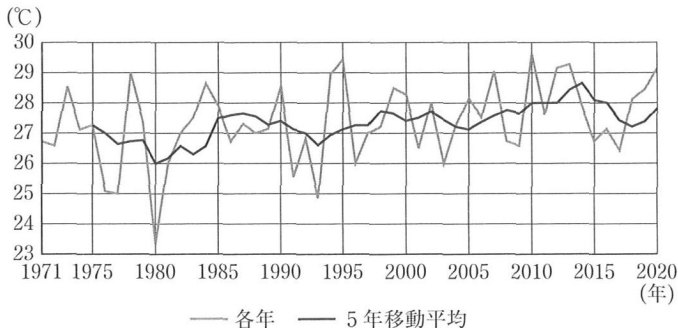
練習
17

教科書 130 ページの表は、1971 年から 2020 年までの 50 年間にについて、東京の 8 月の平均気温をまとめたものである。このデータについて、5 年移動平均を求め、もとの気温のグラフとあわせて折れ線グラフに表してみよう。

指針 **移動平均とグラフ** 5 年移動平均については

(1971 年～1975 年の平均)→1975 年, (1972 年～1976 年の平均)→1976 年, ……,(2016 年～2020 年の平均)→2020 年のように対応させる。移動平均のグラフは、教科書 p.130 のグラフと同様に、1975 年から始まることになる。

解答

3
章

数学と社会生活

B 移動平均のグラフ

教 p.133

練習
18

次の①～④の文章は移動平均について述べた文章である。これらの文章のうち、正しいものをすべて選べ。

- ① 時系列データの折れ線グラフが変動の小さいグラフであれば、その移動平均を表す折れ線グラフも変動の小さいグラフである。
- ② 時系列データの折れ線グラフが変動の激しいグラフであれば、その移動平均を表す折れ線グラフも変動の激しいグラフである。
- ③ 移動平均を表す折れ線グラフが変動の小さいグラフであれば、もとの時系列データの折れ線グラフも変動の小さいグラフである。
- ④ 移動平均が常に増加している期間は、もとのデータの値も常に増加している。

指針 もとの折れ線グラフと移動平均のグラフの関係

移動平均の折れ線グラフはもとの時系列データの折れ線グラフよりも変化のしかたが緩慢になり、もとの時系列データに激しい変化があっても、それが反映しにくくなっていることなどを念頭において考えるとよい。

- 解答 ① もとの時系列データの最大値を M 、最小値を m とおくと、
 $m \leq (\text{移動平均}) \leq M$ が成り立つ。したがって、もとの時系列データの変動が小さければ、移動平均の変動も小さくなる。よって、正しい。
- ② もとの時系列データの変動が激しくても、たとえば、周期的に激しく変動するデータである場合は、その周期と同じ期間の移動平均の変動は激しくならない。
 よって、正しくない。
- ③ ②と③は互いに対偶の関係にあるので真偽は一致する。よって、②が正しくないから、③も正しくない。
- ④ 時系列データが常に増加していない場合でも、移動平均を取る期間のデータの総和が増加していれば、移動平均は増加する。
 したがって、移動平均が増加していても、もとの時系列データが常に増加しているとは限らない。よって、正しくない。
- 以上より、常に正しいものは ① ㊞

4 変化をとらえる ～回帰分析～

まとめ

1 回帰直線

2つの変量 x , y の関係が最もよく当てはまると考えられる1次関数が $y=ax+b$ であるとき、直線 $y=ax+b$ を 回帰直線 という。

補足 回帰直線の式の求め方はいくつかある。

2 最小2乗法と回帰分析

2つの変量 x , y のデータが、次のように与えられているとする。

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$$

各点 (x_k, y_k) が、 $y=ax+b$ で表される直線上にあるとすると

$y_k=ax_k+b$ である。そこで、 y_k と ax_k+b の差の2乗の和

$$\{y_1-(ax_1+b)\}^2 + \{y_2-(ax_2+b)\}^2 + \dots + \{y_n-(ax_n+b)\}^2$$

が最小となるように a , b を定めて、直線 $y=ax+b$ を回帰直線とする。

このような回帰直線の求め方を、最小2乗法 という。

このように、変量 x , y の間の関係をデータから統計的に推測する方法を 回帰分析 という。

3 回帰直線の係数の決定

2つの変量 x , y のデータの値の組が n 個与えられたとき、最小2乗法による回帰直線 $y=ax+b$ の a , b の値は、 x , y のデータの平均値を $\bar{x}$, $\bar{y}$, 分散を

$$s_x^2, s_y^2, x \text{ と } y \text{ の相関係数を } r \text{ とすると } a = \frac{s_y}{s_x} r, b = \bar{y} - a\bar{x}$$

4 変量 x , y の関係を近似する関数

2つの変量 x と y の関係を近似的に関数で表す場合、1次関数が最も適するとは限らず、2次関数や他の関数を用いる方がよい場合もある。

5 対数目盛

範囲が大きいデータを散布図に表すときには、目盛を対数目盛にすると分析しやすくなる場合がある。

A 回帰直線

教 p.134

練習
19

教科書 134 ページの散布図から、平均気温とアイスクリーム・シャーベットの支出額の関係について、どのようなことがいえるか説明せよ。

指針 散布図の読みとり 一方が増加すると他方も増加する傾向がみられることから考える。

3
章数学と
社会生
活

解答 (例) 散布図から、平均気温が高くなるほど、アイスクリーム・シャーベットの支出額が高くなる傾向がみられる。

したがって、平均気温とアイスクリーム・シャーベットの支出額の間には、正の相関があると考えられる。 終

練習
20

教 p.135

東京において、平均気温が 22.0°C である月の 1 世帯あたりのアイスクリーム・シャーベットの支出額を、回帰直線を利用して予測せよ。ただし、小数第 1 位を四捨五入して答えよ。

指針 回帰直線を用いた予測 教科書 p.135 から、平均気温を $x^{\circ}\text{C}$ 、アイスクリーム・シャーベットの支出額を y 円とすると、回帰直線の式は $y=36.43x+191.72$ である。よって、この式に $x=22.0$ を代入すればよい。

解答 回帰直線の式 $y=36.43x+191.72$ に $x=22.0$ を代入して

$$y=36.43 \times 22.0 + 191.72 = 993.18$$

したがって、1 世帯あたりのアイスクリーム・シャーベットの支出額は およそ 993 円 と予測される。 答

B 最小 2 乗法

教 p.137

練習
21

右の表は、同じ種類の 5 本の木の太さ $x(\text{cm})$ と高さ $y(\text{m})$ を測定した結果である。

木の番号	1	2	3	4	5
x	22	27	29	19	33
y	13	15	18	14	20

(1) 2 つの変量 x, y の散布図をかけ。

(2) 2 つの変量 x, y の回帰直線を表す 1 次関数を求めよ。また、その回帰直線を(1)の散布図に重ねてかけ。

指針 最小 2 乗法による回帰直線の決定

(2) 最小 2 乗法による回帰直線 $y=ax+b$ の係数 a, b は、平均値 $\bar{x}, \bar{y}$ 、分散 s_x^2, s_y^2 、相関係数 r によって $a = \frac{s_y}{s_x} r$ …… ① $b = \bar{y} - a\bar{x}$ …… ②

で求める。ここで、 x, y の共分散を s_{xy} とおけば、 $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ であるから、①

に代入すると $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ …… ③ となる。③および②を用いて a, b を決定すればよい。また、分散、共分散の求め方については数学 I で学習済である。

解答 (1) 散布図は右の図のようになる。

(2) x, y のデータの平均値は

$$\bar{x} = \frac{130}{5} = 26, \quad \bar{y} = \frac{80}{5} = 16$$

次に、これらの値をもとにして、
下のような表を作る。

番号	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$
1	22	13	-4	-3	12	16
2	27	15	1	-1	-1	1
3	29	18	3	2	6	9
4	19	14	-7	-2	14	49
5	33	20	7	4	28	49
計	130	80			59	124

上の表から $s_x^2 = \frac{124}{5}, s_{xy} = \frac{59}{5}$

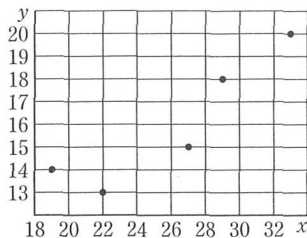
よって $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{59}{5} \div \frac{124}{5} = \frac{59}{124} = 0.475 \dots$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 16 - \frac{59}{124} \cdot 26 = \frac{225}{62} = 3.629 \dots$$

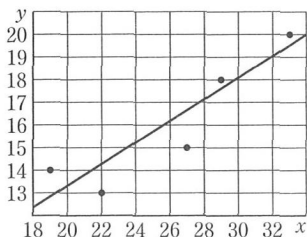
したがって $a = 0.48, b = 3.63$

ゆえに、回帰直線を表す 1 次関数は $y = 0.48x + 3.63$ 答

さらに、(1)の散布図に回帰直線を
重ねてかくと右の図のようになる。



データの各値と
平均値との差を
偏差といったね。



C 変数 x, y の関係を近似する関数

練習
22

教科書 138 ページの速度と空走距離、速度と停止距離について、散布図をかいて、それぞれ 2 つの変数の関係を分析してみよう。(問題文の図は省略)

教 p.139

指針 変数 x, y の関係を近似する関数 散布図をかき、データが直線的に並んでいるか、そうでないかに着目するとよい。

解答 速度と空走距離の散布図、速度と停止距離の散布図はそれぞれ図 1、図 2 の

ようになる。

図 1

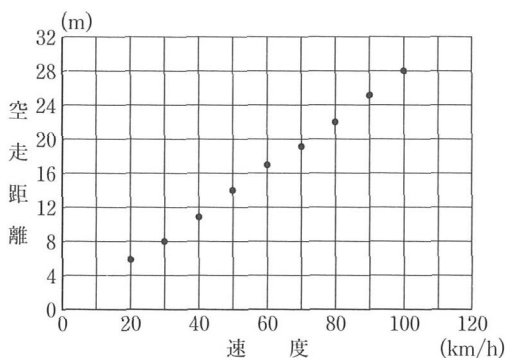
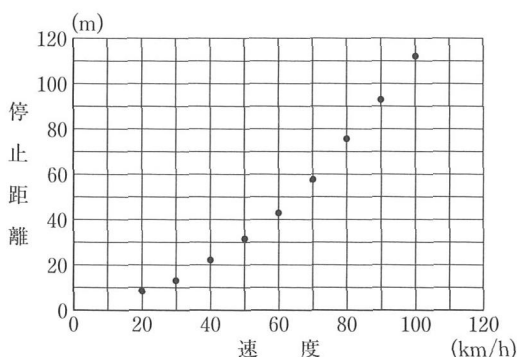


図 2



(分析の例)

図 1 から、時速と空走距離の間には、1 次関数で近似できるような直線的な関係があるようにみえる。

図 2 から、時速と停止距離の間関係を近似するには、1 次関数よりも他の関数のほうが適しているようにみえる。 終

注意 設問においては散布図をかくための図が 1 つしか示されていないが、空走距離の方は、示された図の縦軸のスケールと比べると変化が小刻みであり、点がとりづらいため、上のように別々の図で示している。

参考 変量 x , y の関係がある曲線によって近似されるとき、この曲線を回帰曲線という。たとえば、教科書 p.139 では、速度 x と制動距離 y の関係を近似する 2 次関数 $y=0.01x^2-0.173x+2.1095$ …… ②

が示されているが、曲線②は回帰曲線であるといえる。

D 対数グラフ

教 p.141

練習
23

変数 x , y の関係が指数関数 $y=a^x$ で近似されるデータについて, y 軸だけを対数目盛にした散布図では, 直線的な関係としてみることができる理由を説明せよ。

指針 対数目盛と指数関数 通常の座標平面上の点 (x, y) は, y 軸だけを対数目盛にした座標平面では点 $(x, \log_{10} y)$ に対応する。よって, $y'=\log_{10} y$ とおき, y' が近似的に x の 1 次式で表されることを示せばよい。

解答 変数 x , y の値の組を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ とする。また, 変数 y に対し, 変数 y' を $y'_k=\log_{10} y_k (k=1, 2, \dots, n)$ とする。ここで, 変数 x , y の関係は $y=a^x$ より $\log_{10} y=\log_{10} a^x$,
すなわち $\log_{10} y=x \log_{10} a$ で近似される
ことから, $\log_{10} y_k \doteq x_k \log_{10} a$,
すなわち $y'_k \doteq x_k \log_{10} a$ が成り立つので,
変数 x , y' の関係は $y'=x \log_{10} a$ で近似されることになる。

したがって, y 軸だけを対数目盛にした散布図, すなわち, y が $\log_{10} y$ に対応する散布図では, 直線 $y=x \log_{10} a$ の近くに点が並ぶから, 直線的な関係としてみることができる。 終

$$\log_a b^r \iff r \log_a b$$

だったね。



3 章

数学と社会生活